La dynamique des systèmes oscillants

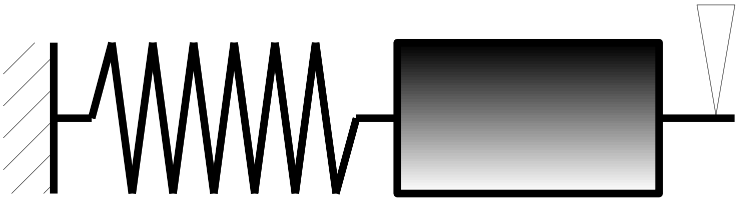
Il suffit d'une quelconque recherche sur la toile pour trouver des tonnes de pages de références, toutes aussi pertinentes les unes que les autres et certaines qui seront certainement très adaptées. Retenons juste que la résolution de ces systèmes grâce au principe fondamental de la dynamique qui s'applique à un solide rigide indéformable et qui stipule que la somme des forces équivaut au produit de la masse par l'accélération. Soit pour un système à une dimension comme le déplacement de la membrane d'un haut-parleur et en utilisant finalement la notation de Newton (Un point = dérivée première par rapport au temps, deux point = dérivée seconde):

$$\sum_{i=0}^{n} \vec{F}_i = M\,\vec{\gamma} = M\,\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} = M\,\ddot{x}$$

Les unités sont essentielles à l'utilisation des formules. Elles permettent d'une part de vérifier leur validité et d'autre part de les utiliser sans erreur. Le cas échéant, il sera utilisé le système international, norme s'exprimant dans les unités suivantes:

Nom	**Usage**	**Abréviation**	**Correspondance**
Seconde	Temps	« s »	
Mètre	Longueur	« m »	
Kilogramme	Masse	« kg »	
Ampère	Courant	« A »	
Hertz	Fréquence	« Hz »	s^{-1}
Newton	Force	« N »	$kg.m.s^{-2}$
Tesla	Champ magnétique	« T »	$kg.s^{-2}.A^{-1}$
Ohm	Résistance électrique	« Ω »	$kg.m^{2}.s^{-3}.A^{-2}$

L'oscillateur harmonique



Un haut parleur est avant tout un système oscillant et pratiquement toute la littérature part de là. Le plus simple de ceux-ci est l'oscillateur harmonique simple dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction périodique et dont la fréquence ne dépend que des caractéristiques intrinsèques du système, ici la masse **M** et la raideur K. Dans le bilan, Il y a qu'une seule force qui apparaît (sans parler de la notion d'inertie liée à la masse), c'est la force de rappel du ressort. Notons que cette force n'existe que si le système n'est pas immobile à la position d'équilibre. Pour être de suite en accord avec la littérature anglo-saxonne, nous parlerons de la souplesse notée **C** (compliance en anglais) qui est l'inverse de la raideur:

$$M\,\ddot{x} = -K\,x = -\frac{x}{C}$$

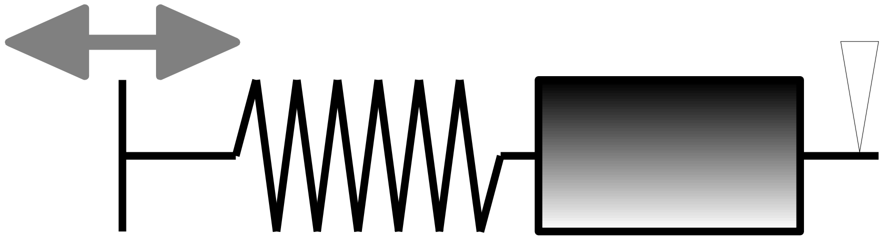
M en kg
C en $m.N^{-1}$

La résolution de ce système simpliste permet de déterminer la fréquence propre de la fonction périodique. Cette fréquence se retrouve également dans les modèles suivants, mais nous parlerons dès maintenant de la pulsation propre ω_0 , directement proportionnelle à la fréquence propre f_0 mais qui permet d'éliminer la constante 2π et de simplifier les formules :

$$\omega_0 = 2\pi\,f_0 = \sqrt{\frac{1}{MC}}$$

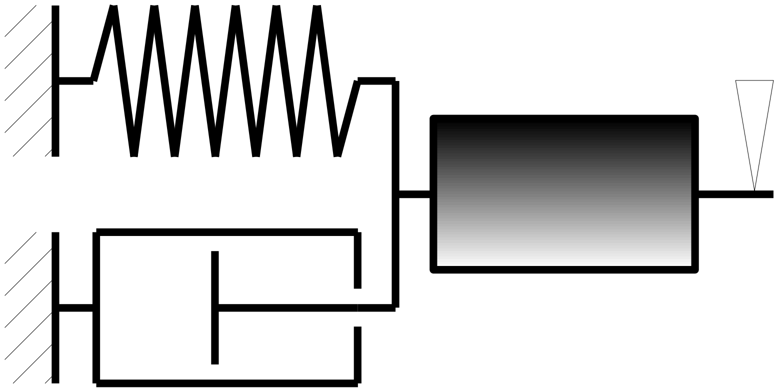
ω_0 en Hz

L’oscillateur entretenu



Si l’on sollicite le système de manière périodique, on distingue deux domaines :
Aux fréquences basses (inférieures à la fréquence propre) les débattements sont grands et la masse suit le mouvement. Le ressort ne présente que de faibles élongation/compressions.
Aux hautes fréquences (supérieures à la fréquence propre), les débattements sont petits et la masse ne se meut presque plus car elle a trop d'inertie.
Notons que c'est l'inverse pour l'accélération: Aux basses fréquences, elle est faible, et aux hautes fréquences, elle est forte.
Cette transition entre deux états se retrouve souvent: Elle indique le passage d'un état caractérisé par de l'énergie cinétique (l'énergie du système est celle de la masse en mouvement) à un état caractérisé par de l'énergie potentielle (l'énergie du système est celle emmagasinée dans le ressort). Ce passage d'un état d' énergie cinétique à celui d'énergie potentielle caractérise le phénomène de résonance. C'est autant valable pour les système masse/ressort/amortisseur que les circuits RLC ou les résonateurs d'Helmotz en pneumatique.

L’oscillateur amorti



Le système précédent oscille indéfiniment et ne prend donc pas en compte les forces de frottement qui sont directement proportionnelles à la vitesse. On résoud cela par l’emploi d’un système dit « dissipatif » car l’énergie de l’oscillateur est dissipée par l’introduction d’une résistance au mouvement notée **R** qui produit un amortissement.

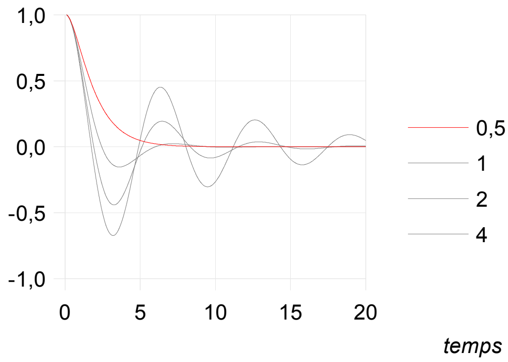
$$M\,\ddot{x} = -R\,\dot{x} - \frac{x}{C}$$

R en kg.s^{-1}

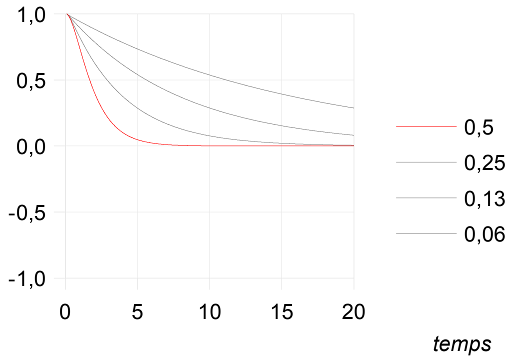
La résolution de ce système assimilable à une équation du second degré montre, pour les solutions, deux domaines distincts avec des comportements différents et permet d’introduire le facteur de qualité Q. Celui-ci est un nombre sans dimension qui permet de représenter facilement le comportement du système.

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{M}{C}}$$

On peut rapidement en regardant Q, savoir si l'oscillateur est « sur-amorti » ou « sous amorti ». Et à la frontière entre ces deux domaines, l’amortissement critique (en rouge sur ces deux graphes suivant) qui correspond à un Q de 0.5 et qui représente théoriquement le retour le plus rapide possible à l’équilibre du système sans aucune oscillation:



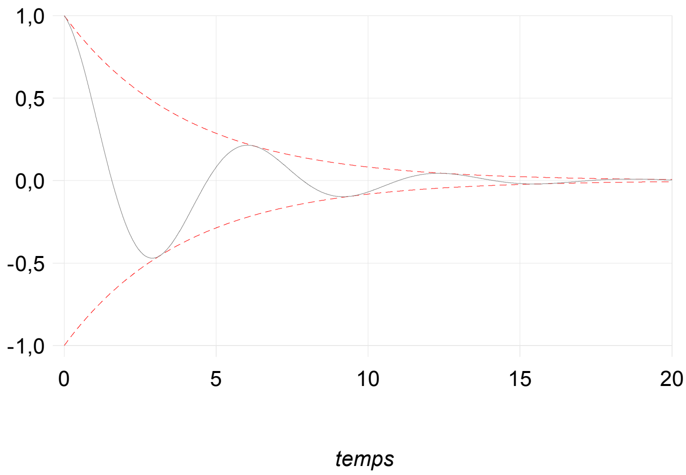
Evolution du déplacement
Domaine sous-amorti
Q fort (>0.5)
Régime pseudo-périodique



Evolution du déplacement
Domaine sur-amorti
Q faible (< 0.5)
Régime apériodique

Dans le domaine « sur-amorti », le système n'oscille pas et rejoint l'équilibre de manière plus ou moins rapide (en théorie il ne le rejoint jamais). Dans le domaine « sous amorti », le système oscille et l'enveloppe de la courbe oscillante est de la forme exponentielle décroissante avec le temps. Elle peut s'exprimer en fonction du facteur de qualité et de la fréquence propre, mais il est tout aussi opportun de montrer qu'elle ne dépend uniquement que de l'amortissement et de la masse.

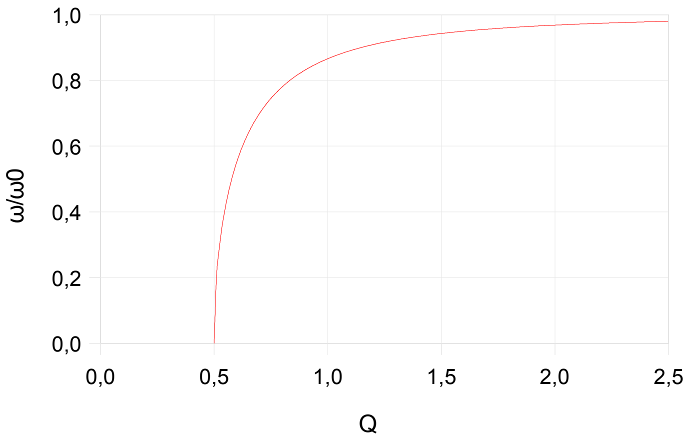
$$E(t) = \pm e^{\frac{-\omega_0 \cdot t}{2Q}} = \pm e^{\frac{-R \cdot t}{2M}}$$



Graphe de l'enveloppe exponentielle du signal de réponse

Puisque l’amplitude diminue avec le temps (en rouge sur le graphe), le phénomène ne peut plus être considéré comme périodique, c’est pourquoi il est parlé de régime pseudo-périodique. La fréquence des oscillations variant avec l’amortissement, il est question de pseudo-pulsations qui peuvent s’écrire en fonction des paramètres du système ou du facteur de qualité Q :

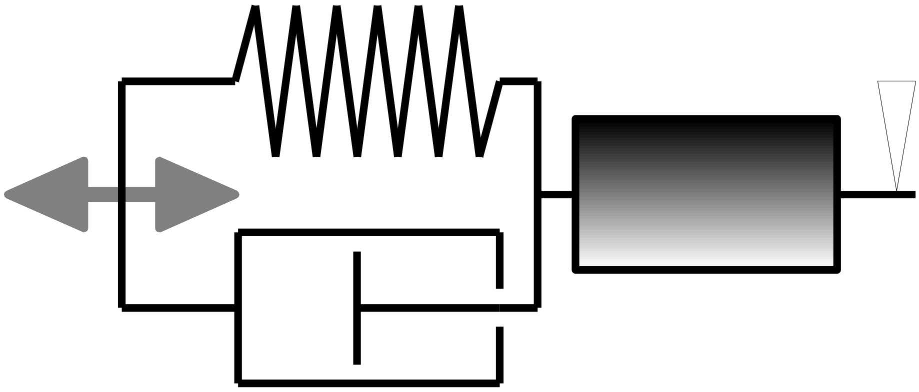
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{MC} - \frac{R^2}{4M^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}$$



$\omega/\omega_0 = f(Q)$

On peut voir que la pseudo pulsation est toujours inférieure à la pulsation propre du système sans amortisseur. Elle tend à être nulle dès lors que l'on se rapproche de l'amortissement critique, par contre, elle tend à devenir égale à cette pulsation propre dès lors que le facteur de qualité est important. Ce qui est normal: la composante d'amortissement disparaissant, le comportement du système tend à devenir identique à celui de l'oscillateur non-amorti.

L’oscillateur amorti entretenu

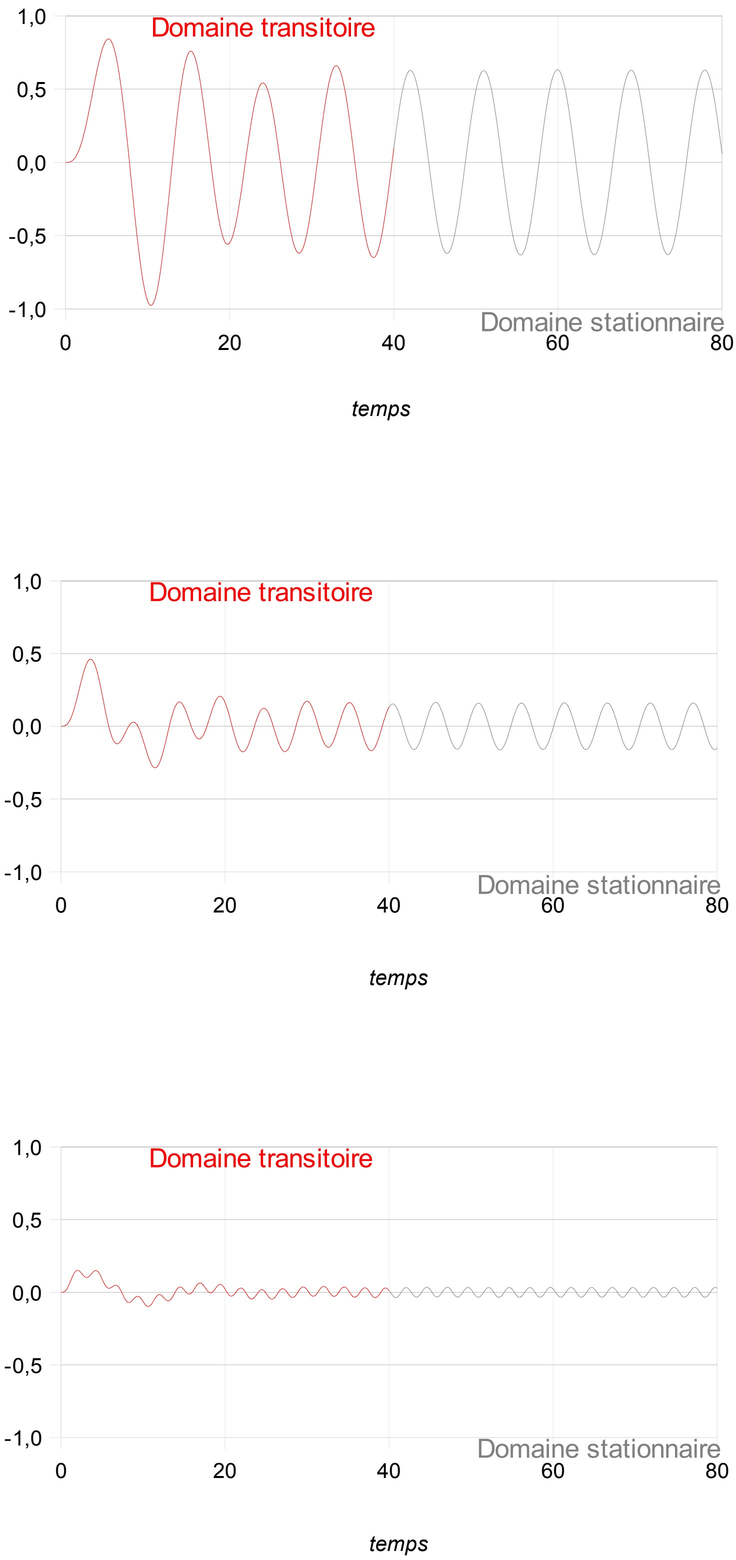


Le système précédent ne fait que jouer la même fréquence si on ne lui impose pas de reproduire un signal. Pour réaliser cela, une force lui est appliquée. Le cas le plus usuel est d’appliquer pour F(t) une fonction périodique de type sinus, mais ce pourrait être n'importe quel signal comme nous le verrons.

$$M\,\ddot{x} = F\,sin\,(\omega_e\,t) - R\,\dot{x} - \frac{x}{C}$$

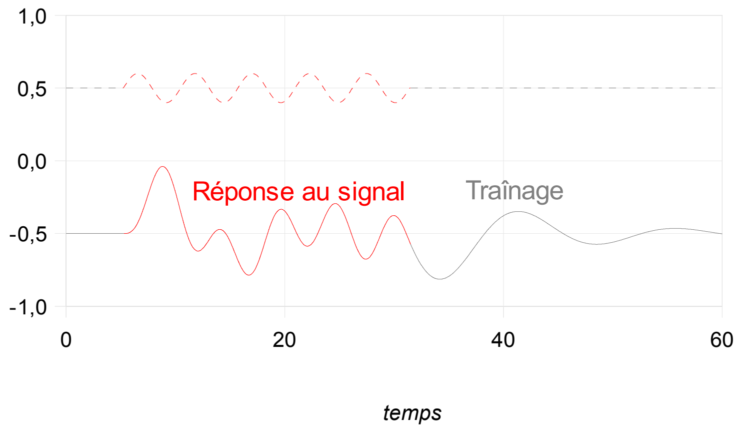
Le comportement dépend donc désormais de la pulsation d’excitation ω_e .
La solution générale de ce type d’équation montre une cohérence de période et une combinaison de deux fonctions :
Une fonction représentative de l’oscillateur amorti et qui engendre un premier domaine « transitoire ».
Une deuxième fonction représentative de la fonction d’excitation qui engendre un deuxième domaine « stationnaire »

Si l’on regarde quelques réponses obtenues à différentes fréquences de ω_e avec ces paramètres M, F, R et C, définissant un Q de 2.2, on voit très bien que la réponse résulte globalement de la combinaison de ces deux courbes.



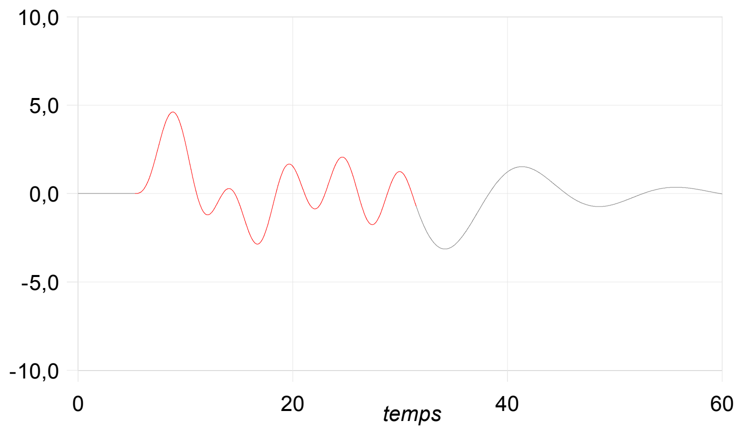
Réponse en x d'un système Q=2,2
pour trois fréquences de sollicitation différentes

Ainsi, on peut voir que le facteur d'amortissement détermine le comportement du système dans le domaine transitoire, il détermine la forme et la durée de la réponse.



Réponse en x, Q = 2.2 avec F = 0.1

Il est intéressant de constater que l'intensité de la force appliquée ne change en rien la forme de la réponse du système, mais elle en modifie l'intensité de manière proportionnelle:

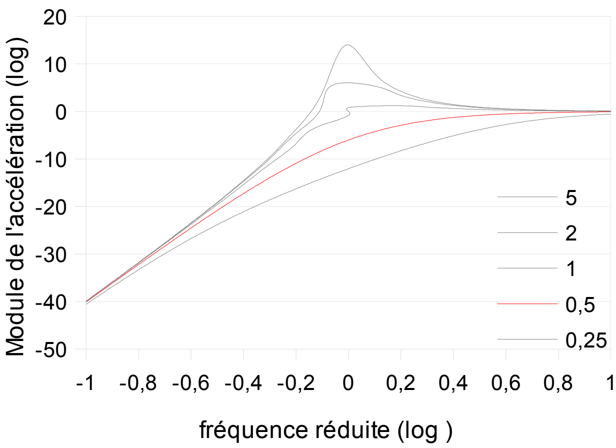


Réponse en x, Q = 2.2 avec F = 1.0

Discussion

Le système de l'oscillateur amorti entretenu est très proche du comportement «global» du haut-parleur si l'on exclut les aspects électriques et acoustiques. Il est important de noter que ce système est « idéal » et travaille sur des objets rigides indéformables. Ce qui n'est pas le cas dans la réalité, mais celui-ci, simplement composé d'un ressort, d'un amortisseur, d'une masse et sous la sollicitation d'une force externe permet de réaliser une excellente première approximation. C'est pourquoi il est intéressant de s'y attarder et d'introduire quelques éléments de réflexion:

Tout d'abord, pour un haut-parleur, le paramètre de ce système qui nous intéresse n'est pas le déplacement x comme nous l'examinions, mais l'accélération. Sans entrer dans le détail, ceci s'explique simplement par le fait que le niveau sonore est la résultante d'une pression acoustique qui le caractérise. Et cette dernière est fonction de l'accélération de la membrane, pas du déplacement ni de la vitesse.



Module de l'accélération en fonction de la fréquence pour différents Q

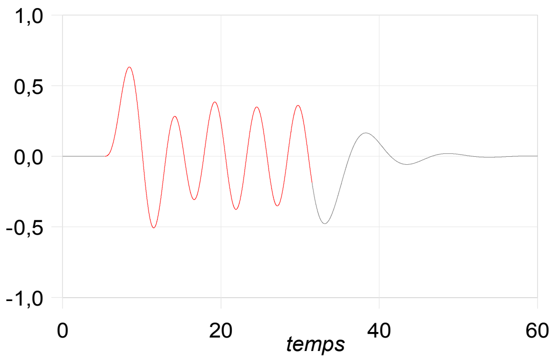
Comme nous pouvons le voir, dans la majorité des cas, tant que le système est sollicité à une fréquence supérieure à sa fréquence de résonance propre, L'intensité de l'accélération est globalement constante.
Mais quand le facteur de qualité est important, il apparaît une « bosse », conséquence d'une accélération de module plus important à la fréquence de résonance du système. Comme le facteur de qualité est plus important, le phénomène de résonance est plus important et les amplitudes sont plus importantes à la fréquence de résonance.

Quelle est l'influence des différents paramètres fondamentaux F, M, R, C sur la réponse du système?

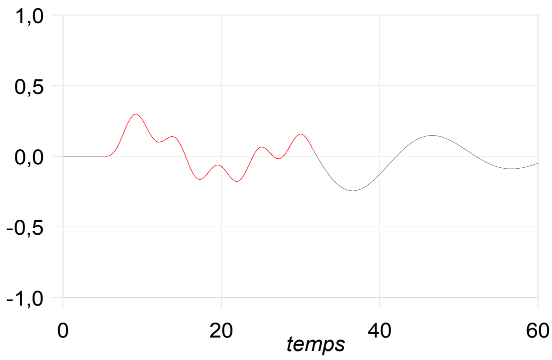
Paramètres	**F**	**M**	**R**	**C**
Intensité	1			
Fréquence de résonance	0	-1/2	0	-1/2
Facteur de qualité	0	+1/2	-1	-1/2
Atténuation	0	-1	1	0

Influence des paramètres sur les valeurs (représentation de leurs puissance)

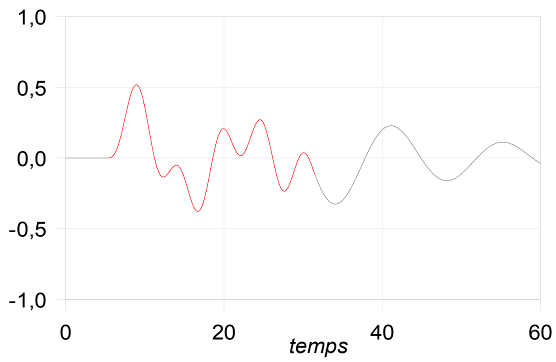
Comme nous l'avons vu, la force n'influence pas la réponse, mis à part l'intensité. Comme nous pouvons le voir sur le graphe, le paramètre probablement prépondérant est celui de l'amortissement, augmenter la « viscosité » du système implique une réponse plus rapide et fidèle. Le facteur de qualité est abaissé de manière plus importante qu'avec les autres paramètres. Indirectement, la diminution du facteur de qualité diminue aussi l'intensité dans une certaine plage de fréquence comme nous pouvons le voir sur les graphes, mais ceci est auxiliaire.
La masse joue également un rôle important: Augmenter la masse engendre une réponse plus lente et moins fidèle car elle influence grandement le facteur de qualité.
Une augmentation de la souplesse permet par contre de diminuer à la fois la fréquence de résonance et le facteur de qualité. Mais sa contribution est beaucoup moins forte que celle de la masse. Par rapport à l'amortissement et à la masse, c'est probablement ce paramètre fondamental, la souplesse, qui influence le moins la réponse finale, toutes proportions gardées bien sûr.
Ci-après une illustration de ces propos sur la réponse en déplacement (pas en accélération) d'un système en faisant varier ses différents paramètres.



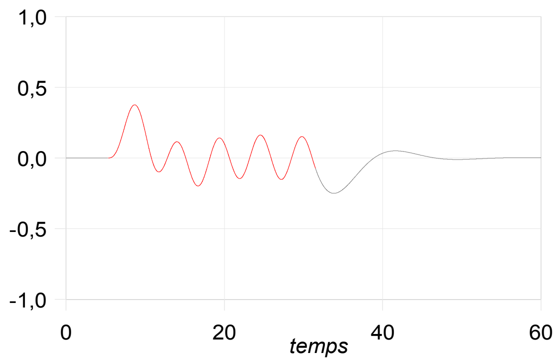
M = 0,25 *R = 0,1 C = 10 Q = 1,58*



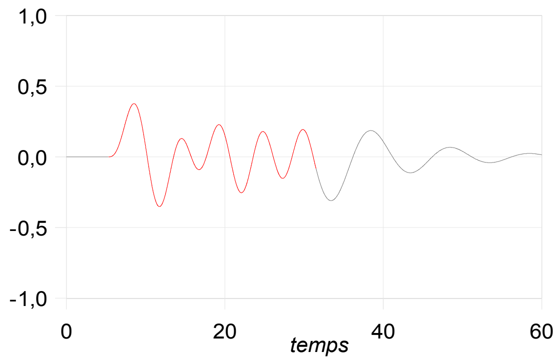
M = 1 *R = 0,1 C = 10 Q = 2,24*



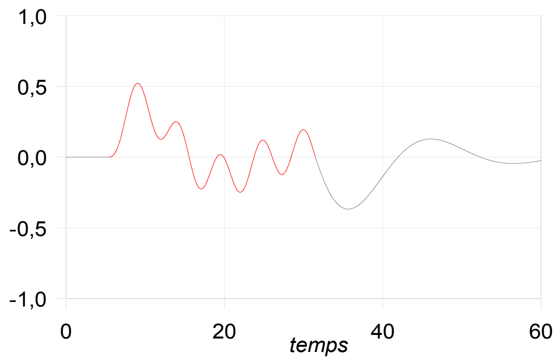
M = 0,5 ***R = 0,05*** *C = 10 Q = 4,47*



M = 0,5 ***R = 0,2*** *C = 10 Q = 1,12*

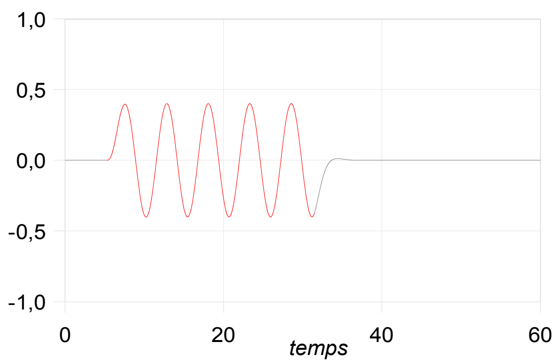


M = 0,5 R = 0,05 ***C = 5*** *Q = 3,16*

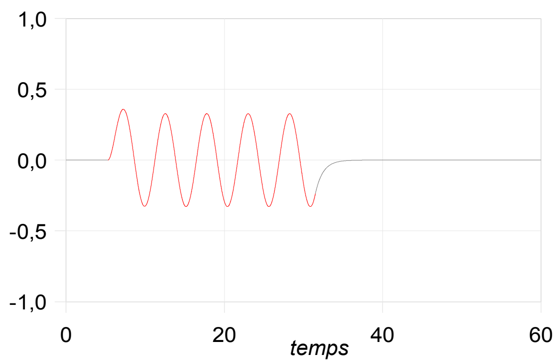


M = 0,5 R = 0,05 ***C = 20*** *Q = 1,58*

Il importe aussi de relativiser: Usuellement, les haut-parleurs dans les enceintes travaillent avec un facteur de qualité entre 0.2 et 0.9. De ce fait, les réponses obtenues devraient ressembler plutôt à celles-ci:



M = 0,1 R = 0,2 C = 5 ***Q = 0,71***



M = 0,018 R = 0,2 C = 5 ***Q = 0,3***

Tout ça c'est bien beau, mais la musique c'est un signal complexe, pas une sinusoïde ou un «tone burst ». Comment cela se passe t-il alors? Est-ce prédictible?

Il faut savoir que tout signal est décomposable ou transformable en un ensemble de fonctions simples, chacune possédant son amplitude et sa phase propre. Il n'y a qu'à aller voir des tutoriaux sur la transformée de Fourrier par exemple, pour se le représenter, mais il existe aussi d'autres types de transformées possédant leur propre base de fonctions.
La théorie nous indique que le signal qui est la somme de fonctions simples de base et qui est modifié par le système oscillant est également la somme de ces fonctions modifiées individuellement par le système oscillant.
C'est aussi simple que ça...

Bibliographie

[1] Le haut-parleur: Manipulations et mesures électro-acoustiques. Par J. d'Appolito aux éditions Publitronic/Elector ISBN 286661114-4

[2] Wikipédia: Systèmes oscillants à un degré de liberté

[3] Wikipédia: Oscillateur harmonique

[4] Wikipédia: Unités dérivées du système international

[5] « Oscillations » PDF par Michael Fowler

[6] « Oscillations and waves » PDF par Richard Fitzpatrick

[7] « Les oscillateurs: rappel théoriques - 3 » PDF de la plateforme 3E C.E.S.I.R.E. Université J. Fournier de Grenoble

… et d'autres bribes glanées sur la toile sans conservation du lien …